Übungen zu Mathematik I

Blatt 3

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Beträge der folgendne Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $|\vec{a}| = \sqrt{20}$, $|\vec{b}| = \sqrt{14}$ und $|\vec{c}| = \sqrt{15}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie zu den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

die folgenden Terme, die Skalarprodukte beinhalten:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d} &= \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} &= \\ \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{a} \cdot \vec{b} &= \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{d} &= 9 \\ \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d} &= 10 \\ \vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{a}\cdot\vec{b} &= -7 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Winkel zwischen den folgenden beiden Vektoren.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\cos\alpha = \dfrac{15}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{30}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73.12°.$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie mit dem Vektorprodukt einen Vektor, der senkrecht zu den folgenden Vektoren ist:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix} -37 \\ 26 \\ 20 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 6: Die Punkte $A=(1,-1,2)$, $B=(-2,1,3)$, $C=(3,-2,5)$ und $D=(6,-4,4)$ bilden ein Parallelogramm. Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ und $\vec{DA}$, welche die Seiten des Parallelogramms sind. Was stellen Sie fest? Wie lang sind die Seiten?

Lösung: Es gilt:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{CD}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{DA}=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wir stellen folgendes fest: $\vec{AB}=-\vec{CD}$ und $\vec{BC}=-\vec{DA}$.

Aufgabe 7: Bestimmen Sie alle Seitenlängen und Winkel im Dreieck, das durch die Punkte $A=(-2,0,3)$, $B=(-6,4,-1)$ und $C=(4,-1,2)$ gebildet wird. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Lösung: Wir schreiben die Seiten als Vektoren:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC}=\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{CA}=\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

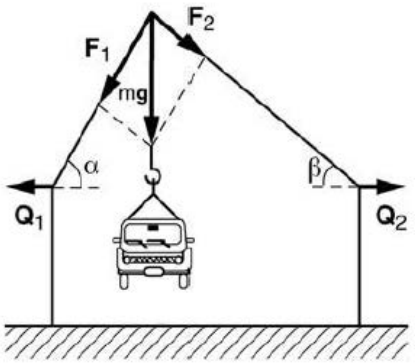


Abbildung 1: Fabrikhalle mit Laufkran und auftretenden Kräften

Damit erhalten wir die Seitenlängen $|\vec{AB}| = \sqrt{48}$, $|\vec{BC}| = \sqrt{134}$ und $|\vec{CA}| = \sqrt{38}$. Die Winkel lauten $\alpha = 124.19°$, $\beta = 26.14°$ und $\gamma = 29.67°$. Der Flächeninhalt beträgt $A = 17.66..$

Aufgabe 8:

Eine Fabrikhalle habe einen Querschnitt wie in Abb. 1 (a) dargestellt ($\alpha = 60°$, $\beta = 40°$). Unter dem Dachfirst soll ein Laufkran angebracht werden, der mit der maximalen Masse von $m = 3t$ belastet werden soll. Diese Last muss vom Dach aufgefangen werden, d.h. entlang der Dachschrägen treten die Belastungskräfte F_1 und F_2 auf. Berechnen Sie F_1 und F_2 sowie die sich daraus ergebenden Querkräfte Q_1 und Q_2, die rechtwinklig auf den Wänden stehen.

Lösung: Wir bestimmen die fehlenden Winkel und betrachten dazu das Kräfteparallelogramm in der Abbildung. Dann gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{|\vec{F_1}|}{\sin 50} = \frac{mg}{\sin 100} \quad \Rightarrow |\vec{F_1}| = mg\frac{\sin 50}{\sin 100} = 22892.48\,\mathrm{N}\,.$$

Analog erhalten wir für die zweite Kraft:

$$\frac{|\vec{F_2}|}{\sin 30} = \frac{mg}{\sin 100} \quad \Rightarrow |\vec{F_2}| = mg\frac{\sin 30}{\sin 100} = 14942\,\mathrm{N}\,.$$

Für die Querkräfte gilt:

$$\vec{Q_1} = \begin{pmatrix} (\vec{F_1})_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{Q_2} = \begin{pmatrix} (\vec{F_2})_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also müssen wir die Vektorkomponenten von $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ bestimmen. Legen wir den Ursprung in den Giebel des Dachstuhls und verwenden Polarkoordinaten, ergibt sich:

$$\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \begin{pmatrix} \cos(240) \\ \sin(240) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11446.24 \\ -19687.53 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \begin{pmatrix} \cos(320) \\ \sin(320) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11446.24 \\ -9604.53 \end{pmatrix} .$$

Damit stellen wir fest, dass $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$ gilt!